



## TESTIRANJE PERFORMANSI INVESTICIONOG PORTFOLIJA PRIMENOM BLOK BUTSTREP METODA

**Boris Radovanov**

*Univerzitet u Novom Sadu, Ekonomski fakultet u Subotici, Srbija*

✉ [radovanovb@ef.uns.ac.rs](mailto:radovanovb@ef.uns.ac.rs)

**Aleksandra Marcikić**

*Univerzitet u Novom Sadu, Ekonomski fakultet u Subotici, Srbija*

✉ [amarcikic@ef.uns.ac.rs](mailto:amarcikic@ef.uns.ac.rs)

UDK  
336.07  
Originalni  
naučni rad

**Apstrakt:** Cilj ovog rada jeste kreiranje stabilnog modela optimizacije investicionog portfolija kroz visok stepen diversifikacije i smanjenje iznenadnih promena u alokaciji sa praćenjem dinamike faktora uticaja. U tom smislu, javlja se primena butstrep procedure, koja bez prevelikog broja uključenih ograničenja u procesu optimizacije pruža rešenja zasnovana na neizvesnim informacijama. Ovako definisan metod optimizacije patentiran je od strane Michauda (1999) pod nazivom reuzorkovana efikasnost. Prema tome, ovaj rad nudi komparaciju performansi blok butstrep modela optimizacije i tradicionalnog Markowitzevog modela unutar i van uzorka primenjujući najčešće trgovane akcije na Beogradskoj berzi. Rezultati pokazuju bolje performanse izvan uzorka, kao i zastupljenost većeg broja akcija formiranjem portfolija putem butstrep metodologije. Ipak, samo putem tradicionalnog procesa optimizacije se može dostići optimum shodno postavljenim ograničenjima. Takvi efekti se mogu opaziti poređenjem granica efikasnosti dobijenih putem navedenih modela optimizacije. Međutim, optimizacija zasnovana na butstrep metodima svoje mesto pronalazi u smanjenju grešaka ocenjivanja proisteklih iz ograničene veličine uzorka.

Primljeno:  
13.03.2014.  
Prihvaćeno:  
10.07.2014.

**Ključne reči:** Investicioni portfolio, optimizacija, reuzorkovana efikasnost, butstrep, granica efikasnosti

### 1. Uvod

Tržišni učesnici procenjuju konkurentnost kompanije registrovane na finansijskom tržištu preko cena njihovih hartija od vrednosti. Premda se radi o vremenskoj seriji nepoznatih i visoko volatilnih dnevnih osmatranja cena hartija od vrednosti u budućim periodima, proces konstruisanja investicionog portfolija

može predstaviti promene u odnosu na poznatu prosečnu vrednost pod uslovom da je definisan dugoročnom strategijom alokacije kapitala.

S obzirom na efekte karakteristika ponašanja tržišnih učesnika na kratkoročni obrazac kretanja promena u cenama hartija od vrednosti, tržište postaje krajnje nepredvidivo, odnosno efikasno. Međutim, duži rok pruža odgovarajuće dokaze mogućeg uspešnog predviđanja (Fama i French, 1988.). Samim tim, mogućnost adekvatnog predviđanja je dostupno samo dugoročnim investitorima, dok ostaje i dalje neuhvatljivo pravo vreme ulaganja.

Jedan od preduslova uspešne alokacije raspoloživog kapitala predstavlja razvijanje robusnije metodologije koja na jednom višem nivou razmatra inherentne probleme vrednovanja i obrade podataka. Ovo uključuje integraciju procesa optimizacije putem različitih metoda reuzorkovanja ulaznih podataka, selekciju adekvatnih finansijskih instrumenata ulaganja, kao i tehniku vremenskog balansiranja koja osigurava da izabrani portfolio ostane usklađen sa dinamičkom strukturom finansijskog tržišta. Predložena metodologija poseduje sve preduslove za uspešnu primenu u procesu odlučivanja o alokaciji raspoloživog kapitala, posebno na visoko volatilnim finansijskim tržištima. Zapravo izabrana butstrep procedura pomenute metodologije selektivno izvlači nove uzorke vremenskih serija stopa prinosa zadržavajući prvobitnu strukturu podataka. Ovako izgrađen efikasni portfolio set kasnije biva upoređen sa tradicionalnim M-V (Mean – Variance) problemom optimizacije portfolija.

## **2. Pregled literature**

Učestala upotreba Markowitzeve procedure izbora portfolija u poslednjih nekoliko decenija ističe učestalu problematiku adekvatne kompozicije investicionog portfolija kroz ekstremna učešća pojedinih investicija u portfoliju, neravnotežnu alokaciju resursa i nedostatak diversifikacije rizika. Takav pristup, kako navode Becker et al. (2009), povećava uticaj greški u ocenjivanju na dobijanje učešća investicionog portfolija i smanjuje performanse ocenjivanja van uzorka. Kako ovakva metodologija optimizacije portfolija indicira visok stepen osetljivosti svih ulaznih pokazatelja, jasna je namera stvaranja jednog razumnog pristupa koji određuje osetljivost rezultata na različite input parametre i fokusira se na veće napore u ocenjivanju kako bi se dobili parametri nižeg stepena osetljivosti. Zabeleženo je više pokušaja kreiranja modela sa nižom greškom u ocenjivanju i poboljšanim portfolio performansama. Na jednoj strani, tehnika optimizacije portfolija je podignuta na viši nivo primenom Bayesovog pristupa ili Blek-Littermanovim modelom (Black, Litterman, 1992). S druge strane su razvijeni i heuristički modeli kao što je recimo koncept Michauda (1998) ili Michauda i Michauda (2008). Ovaj rad obuhvata analizu i

primenu tehnike reuzrokovane efikasnosti<sup>1</sup> patentirane od strane Michauda (1999), koja je bazirana na ponovnom uzrokovanju portfolio stopa prinosa kako bi se odrazili efekti neizvesnosti u vremenskoj seriji stopa prinosa.

Sa ciljem analize performansi formiranog Michaudovog pristupa efikasnosti portfolija mnoga istraživanja polaze od komparacije njegovih rezultata sa rezultatima tradicionalnog Markowitzevog pristupa selekcije portfolija. Tako recimo, Fletcher i Hillier (2001) u istraživanju tržišta kapitala pronalaze da Michaudov pristup nadmašuje Markowitzev, ali ta poboljšanja nisu statistički značajna. Markowitz i Usmen (2003) putem studije simulacije pronalaze ovog puta snažne dokaze boljih performansi Michaudovog pristupa u odnosu na Bayesovu ocenu. Nešto slično postižu i Michaud i Michaud (2008), odnosno Delcourt, Petitjean (2011). Međutim, postoji i druga strana koja dokazuje bolje performanse Markowitzevog pristupa. Tako recimo, Harvey et al. (2008) ponavljaju simulacionu studiju Markowitza i Usmena sa nešto sofisticiranijom polaznom distribucijom stopa prinosa i odgovarajućim algoritmom, gde uglavnom superiorne rezultate pokazuje Markowitzev pristup. Osim toga, Becker et al. (2009) potvrđuju nadmoć Markovicevog procesa u gotovo svakom slučaju, a posebno ukoliko se pojave ozbiljne greške u ocenjivanju.

Pri svemu tome, svaka od ovih studija, kao i brojne druge urađene na temu komparacije dva pristupa selekcije portfolija, je skoncentrisana na specifičan set postavki koje retko dovode do generalnih preporuka. Na osnovu analize pomenutih radova, rezultati Markowitzeve i Michaudove procedure su najčešće balansirani u slučaju dugoročnih ograničenja i veoma osetljivi na promenu dužine vremenskog horizonta ocene investiranja sa mogućnošću davanja investicionih saveta u različitim inicijalnim situacijama.

### **3. Markowitzev model optimizacije**

Markowitz (1952) je razvio teoriju selekcije portfolija koja gotovo trenutno postaje fundament finansijske ekonomije u domenu upravljanja imovinom i investicionom praksom. Ovaj autor ističe osnovnu premisu ove teorije da se svaka ekonomska odluka zasniva na nekoj vrsti kompromisa (trade-off). Postavljajući pretpostavku da racionalni investitor donosi investicionu odluku na bazi očekivanog prinosa i rizika, portfolio se smatra efikasnim sa stanovišta odnosa prinosa i rizika ako se postiže minimum varijanse, kao mere rizika, za dati nivo očekivanog prinosa portfolija ili ako se postiže maksimalan prinos za dati nivo varijanse portfolija. Prema tome, cilj ovako postavljene optimizacije jeste pronalaženje portfolija koji vrši diversifikaciju rizika bez redukovanja prinosa, odnosno da asistira izgradnji efikasnog portfolija.

---

<sup>1</sup> U.S. Patent #6,003,018 by Michaud et al., December 19, 1999

Takode, autor izvodi i algoritam kritične linije, koji identifikuje sve izvodljive portfolije za dati set finansijskih instrumenata uz minimizaciju rizika za dati nivo očekivanog prinosa i maksimizaciju prinosa uz dati nivo preuzetog rizika, nazvan granica efikasnosti. Sam proces deriviranja granice efikasnosti moguć je samo uz poznavanje tri promenljive: očekivane stope prinosa, standardne devijacije i kovarijanse seta finansijskih instrumenata. Grafički predstavljeno, granica efikasnosti neposredno pokazuje korisnost diversifikacije. Veličina ove korisnosti, ceteris paribus, se direktno reflektuje preko vrednosti koeficijenta kovarijanse, odnosno, što je niža kovarijanse viši je stepen diversifikacije i obrnuto. Dakle, granica efikasnosti indicira značaj procesa redukovanja rizika. Teorija izbora portfolija proširuje tehnike linearnog programiranja na razvoj algoritma kritične linije polazeći od prethodno definisanih pretpostavki da investicione odluke zavise isključivo do očekivane stope prinosa  $E(R_p)$  i varijanse  $\sigma_p^2$  portfolio prinosa. Prateći ovu pozadinu, procedura portfolio optimizacije zahteva poznavanje  $E(R_i)$ , kao očekivane stope prinosa i-tog finansijskog instrumenta,  $\sigma_i$  kao standardne devijacije stopa prinosa i-tog finansijskog instrumenta,  $\rho_{ij}$  kao koeficijent korelacije između stopa prinosa dva finansijska instrumenta  $i$  i  $j$  za  $i, j = 1, 2, \dots, n$  i  $\sigma_{ij}$  kao kovarijansu između finansijskih instrumenata  $i$  i  $j$ . Posledično tome, klasičan model optimizacije odnosa prinosa i rizika (Mean-Variance Model, M – V model) se može predstaviti u sledećoj formi:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\
 \text{st} \quad & \\
 & \sum_{i=1}^n E(R_i) x_i \geq M \\
 & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1}$$

Formulacija data izrazom (1) predstavlja konveksni problem kvadratnog programiranja gde se sa  $M$  obeležava potreban (traženi) nivo stope prinosa portfolija za preuzeti nivo rizika, dok se sa  $x_i$  označava procentualni deo raspoloživog kapitala koji će biti uložen u  $i$ -ti finansijski instrument. Treba istaći da se polazni inputi mogu razlikovati sa stanovišta vremenskog obuhvatanja jedinica osmatranja, na nivou dnevnih, mesečnih ili godišnjih pokazatelja, ali i sa stanovišta primenjenog modela ocenjivanja istih, gde se često pojavljuju model vrednovanja uloženog kapitala i model arbitražnog vrednovanja.

Kako ističe Kirzner (2000), ovako formirani model optimizacije predstavlja analizu odnosa prinosa i rizika, koja zajedno sa modelom vrednovanja uloženog kapitala (CAPM) postaje moderna portfolio teorija.

Navedeni model ima nekoliko jasno vidljivih nedostataka. Prva uočljiva kritika postavljenog modela optimizacije se odnosi na polazne pretpostavke. Opšte je poznato da prinosi nisu normalno distribuirani. Investitori mogu izvesti drugačiju funkciju korisnosti od polazne kvadratne forme. Osim toga, investitori mogu imati nekoliko investicionih perioda nasuprot jednog postavljenog putem navedenog modela optimizacije. Takođe, mera rizika koja se koristi u modelu se može smatrati neprihvatljivom, jer ona na identični način meri vrednosti iznad i ispod prosečne stope prinosa, dok se sa investicione tačke gledišta varijabilnost stopa prinosa iznad proseka ne smatra rizikom. Prinosi ispod proseka ili neka unapred definisana stopa prinosa se smatra relevantnijom merom rizika. U prilog ovoj tvrdnji stoji i pretpostavka simetričnosti stopa prinosa diversifikovanog investicionog portfolija koja se sve više udaljava od polazne tačke sa rastom dužine investicionog perioda. Međutim, u mnogim istraživanjima granica efikasnosti bazirana na varijansi, kao meri rizika, se vrlo malo razlikuje od granica efikasnosti zasnovanih na drugim merama rizika, što još uvek u većini slučajeva opravdava varijansu kao pogodnu meru rizika.

Zapravo najozbiljniji problem Markowitzevog modela optimizacije u praktičnoj primeni prema Michaudu (1998) jeste nestabilnost i nejasnost (dvosmislenost). Ovi epiteti se navedenom modelu optimizacije dodeljuju pre svega zbog činjenice da čak i male promene u polaznim pokazateljima mogu dovesti do snažnih promena učešća pojedinačnih investicija u optimalnom portfoliju. Samim tim, upotrebna vrednost ovog modela u svrhu formiranja investicione odluke je pod velikim znakom pitanja.

#### **4. Butstrep model optimizacije**

Postavlja se pitanje zašto je potrebno primeniti metod reuzorkovane efikasnosti. Polazna tačka u objašnjenju ovog pitanja jeste dobro poznati set rigidnih pretpostavki koji se koristi u radnom okviru Markowitzevog modela optimizacije. U praksi, funkcija korisnosti postaje mnogo kompleksnija, uključujući preferencije van opsega odnosa prinosa i rizika. Tradicionalna rešenja ovog modela optimizacije su po prirodi statična i oslanjaju se isključivo na stabilnost ulaznih podataka. Na taj način, navedena metodologija nudi optimizaciju samo za jedan vremenski trenutak, a svako manje pomeranje rigidnih pretpostavki ili ulaznih podataka može da dovede do ozbiljnih narušavanja polaznih rešenja. Sve prethodno navedene činjenice uvećavaju greške u ocenjivanju koje u krajnjoj meri dovode do smanjenja upotrebne vrednosti modela selekcije portfolija.

Da bi se izbegle ovi nedostaci, potrebno je postaviti algoritam koji karakteriše dinamička struktura. Zapravo primena butstrep postupka u procesu optimizacije, kako navode Srivatsa et al. (2010), trenutno dovodi do prednosti kroz ignorisanje ograničenih istorijskih podataka o stopama prinosa, a fokusiranjem na opseg mogućih ishoda. U prilog tome, Delcourt i Petitjean (2011) elaboriraju mišljenje da nizak stepen diversifikacije i iznenadne promene u alokaciji kroz portfolijo predstavljaju nepoželjna svojstva tradicionalnog modela selekcije portfolija i ističu potrebu za kreiranjem alternativnog pristupa formiranja portfolija. Upravo zato, predložena je tehnika reuzorkovane efikasnosti kako bi se prevazišli nedostaci tradicionalne procedure selektovanja portfolija. Michaud (1999) patentira ovu tehniku reuzorkovane efikasnosti zadržavajući određene polazne pretpostavke tradicionalnog modela selekcije portfolija. Prema rečima Beckera et al. (2009) cilj ovako postavljene metodologije jeste minimizacija uticaja ocene rizika na kompoziciju portfolija, postizanje većeg stepena ravnoteže u alokaciji kapitala i poboljšanje portfolio performansi u odnosu na polazni model. Scherer (2002) ukratko rezimira najvažnije korake navedene procedure na sledeći način:

- Oceniti matricu varijansi – kovarijansi i vektor očekivanih stopa prinosa na osnovu vremenske serije podataka.
- Vršiti postupak formiranja B novih butstrep uzoraka iz polazne vremenske serije stopa prinosa polazeći od inicijalne distribucije  $\theta$  (u ovom radu će se koristiti već pomenuti set butstrep procedura). Pri tome, broj ponovljenih uzoraka reflektuje stepen neizvesnosti ulaznih veličina. Zatim, izračunati novu matricu varijansi – kovarijansi iz butstrep uzorka.
- Izračunati granicu efikasnosti na osnovu ulaznih podataka izvedenih u drugom koraku i sačuvati optimalna učešća u portfoliju za  $m$  jednako raspoređenih prinosa na postavljenoj granici.
- Ponoviti drugi i treći korak B puta i izračunati prosečna učešća u portfoliju za svaki zadati nivo stope prinosa.

Ponavljajući istoriju vremenske serije stopa prinosa, butstrep postupak nagoveštava pojavu različitih izlaznih rešenja u odnosu na standardnu proceduru selekcije portfolija. S druge strane, obzirom na sposobnost prikazivanja raznovrsnih investicionih rešenja, portfolio izveden putem butstrep procedure poseduje željena svojstva za investitore sa različitim preferencijama. Ovakav pristup predstavlja efikasan način vizuelizacije grešaka u ocenjivanju putem tradicionalnog postupka optimizacije investicionog portfolija. Ocenjeni parametri, upotrebom klasičnog metoda alokacije, su izračunati samo na osnovu jedne moguće realizacije stopa prinosa u prethodnom periodu. Čak iako se radi o stacionarnoj realizaciji procesa, pretpostavlja se da samo veliki uzorci mogu oceniti parametre prinosa i rizika približno jednako stvarnoj distribuciji parametara. Upravo zato se predlaže postupak ponovnog uzorkovanja koji uspešno beleži stohastički hod ulaznih podataka o stopama prinosa. Osim toga,

kako ističe većina radova na ovu temu, rezultati tradicionalnog modela optimizacije su veoma koncentrisani, odnosno nedovoljno diversifikovani, tako da većina dostupnih ulaganja u hartije od vrednosti ne ulazi u optimalno rešenje. S druge strane, butstrep algoritam optimizacije investicionog portfolija interpretira vektor učešća u portfoliju kao skup statistički jednakih učešća čiji prosek nudi krajnje rešenje alokacije kapitala. Ipak, samo je originalni set učešća i optimalan, a sve druge, pa i butstrep, portfolio solucije moraju biti ispod granice efikasnosti. Njihova učešća su tako direktan rezultat greški dobijenih putem postupka uzorkovanja.

Radi boljeg shvatanja modela optimizacije zasnovanog na reuzorkovanju, nastavak teksta nudi objašnjenje postupka generisanja novih podataka putem dva blok butstrep metoda.

#### **4.1. Butstrep pokretnih blokova**

U zasebnim radovima Künsch (1989) i Liu i Singh (1992) formulišu novu šemu formiranja uzoraka koja se naziva butstrep pokretnih blokova (MBB – Moving Block Bootstrap) ili blok butstrep sa preklapanjem. Butstrep pokretnih blokova uzorkovanje vrši samo unutar uzastopno formiranih blokova. Kao rezultat ovakvog postupka, struktura vremenske serije originalnih podataka je sačuvana unutar svakog pojedinačnog bloka podataka.

Na osnovu slučajno formiranog uzorka  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vrši se definisanje ocene putem butstrep postupka pokretnih blokova. Ako se pođe od pretpostavke da je  $l \equiv l_n \in [1, n]$  ceo broj, za zavisne podatke obično se zahteva da  $l \rightarrow \infty$  i  $n^{-1}l \rightarrow 0$  kada  $n \rightarrow \infty$ . Ipak, konkretna deskripcija ovog metoda mora početi od odgovarajućih ograničenja na dužinu bloka  $l$ . Ako je  $B_i = (X_i, \dots, X_{i+l-1})$  odgovarajući  $i$ -ti blok vremenske serije, tada dužina bloka polazi od  $X_i$  za  $1 \leq i \leq N$  gde je  $N = n - l + 1$  predstavljen kao broj blokova unutar formiranog uzorka. Kako bi se formirao uzorak iz butstrep postupka pokretnih blokova potrebno je slučajnim postupkom izabrati određeni broj blokova iz skupa  $\{B_1, \dots, B_N\}$ . Shodno tome,  $B_1^*, \dots, B_k^*$  predstavlja slučajni uzorak sa ponavljanjem iz skupa  $\{B_1, \dots, B_N\}$  gde svaki blok sadrži isti broj elemenata  $l$ . S obzirom da su osmatranja unutar bloka  $B_i^*$  predstavljeni kao  $(X_{(i-1)l+1}^*, \dots, X_{il}^*)$ , gde je  $i = 1, \dots, k$  tada butstrep osmatranja konstituišu uzorak  $X_1^*, \dots, X_m^*$  na osnovu butstrep postupka pokretnih blokova veličine  $m \equiv kl$ .

#### **4.2. Stacionarni blok butstrep**

Slično blok butstrep proceduri, stacionarni butstrep, kreiran od strane Politisa i Romana (1994), obuhvata ponovno uzorkovanje originalnih podataka

kako bi se formirali novi pseudo uzorci vremenskih serija i kako bi se ponovno izračunale statistike od značaja, ali sa jedno značajnom razlikom u domenu stacionarnosti vremenske serije. Stacionarni butstrep je opšte prihvatljiv za primenu u slučaju stacionarnih vremenskih serija slabe zavisnosti. Kod blok butstrep postupka novoformirani uzorci vremenskih serija nisu stacionarni, tako da se preko stacionarnog butstrep algoritma pokušava otkloniti ova nepoželjna statistička karakteristika. Naime, shodno originalnom uzorku podataka  $X_1, X_2, \dots, X_n$  generiše se pseudo vremenska serija  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$  putem adekvatne šeme ponovnog formiranja uzoraka koji su zaista stacionarni. Tako definisana procedura pokušava da oponaša karakteristike originalnog uzorka zadržavajući poželjno svojstvo stacionarnosti originalne vremenske serije i unutar pseudo uzoraka vremenskih serija. Da bi se to postiglo, predlaže se primena butstrep postupka koji se bazira na šemi formiranja blokova slučajne dužine.

## 5. Performanse investicionog portfolija

S namerom testiranja performansi dva pomenuta modela optimizacije investicionog portfolija, analiza efikasnosti u daljem tekstu izvodi proces zasnovan na dve iteracije. U prvoj se izračunavaju stvarne vrednosti parametara stopa prinosa, varijansi i kovarijansi, dok druga podrazumeva izvlačenje realizacija stopa prinosa za unapred definisanog perioda osmatranja iz butstrep distribucija navedenih parametara. Pri tome, ova druga iteracija predstavlja neku vrstu aproksimacije stvarne primene postupka optimizacije koja korespondira eventualnim promenama u ulaznim parametrima.

Prvo se izračunava vektor očekivanih stopa prinosa  $\underline{\mu}$  i matrica varijansi – kovarijansi  $\underline{\Sigma}$  iz odgovarajuće butstrep distribucije. Postupak ocenjivanja ovih parametara se ponavlja B puta, gde je  $B = 500$ , za svaku od polaznih strategija optimizacije.

Nakon toga, vrši se postupak optimizacije putem reuzorkovanja i porede se dobijeni rezultati sa tradicionalnim modelom optimizacije. Postavljene alternative investicionih portfolija se realizuju samo pod pretpostavkom nerizičnih pozajmica nedostajućeg kapitala za investiciju i slučajem „bez ograničenja“ ili ograničenja „samo duge pozicije“ koja podrazumeva da nema prodaje hartija od vrednosti u koje se investira tokom navedenog vremenskog perioda. Oba ograničenja podrazumevaju da se učešća pojedinačnih investicija u portfoliju nađu u intervalu  $0 \leq x_i \leq 1$ . Kao rezultat dobijaju se optimalna portfolio učešća za svaki pristup optimizaciji.

Da bi se uspešno izvršila procena i komparacija svih procesa optimizacije, Becker et al. (2009) predlažu ocenu mere vrednosti preferencija investiranja  $\phi$ , koja se dobija preko sledeće matrične jednačine:



$$\phi = \underline{x}^T \cdot \underline{\mu} - \frac{\lambda}{2} \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{x} \quad (2)$$

Gde je  $\underline{x}$  vektor učešća n pojedinačnih rizičnih investicija u portfoliju, a  $\lambda$  koeficijent averzije od rizika. Ako se pođe od pretpostavke normalne distribucije stopa prinosa rezultati funkcije preferencija  $\phi$  predstavljaju odgovarajući ekvivalent prinosa funkcije korisnosti pod uslovom konstantne vrednosti koeficijenta averzije od rizika.

Osim funkcije preferencije ovaj rad koristi i Šarpov indeks (Sharpe Ratio) u komparaciji strategija optimizacije. Navedeni indeks pokazuje meru premije rizika po jedinici devijacije investiranog finansijskog instrumenta i može se predstaviti putem sledećeg izraza:

$$S = \frac{E(R_p) - E(R_B)}{\sigma_p} \quad (3)$$

Gde  $E(R_p)$  predstavlja očekivanu stopu prinosa posmatranog portfolija,  $E(R_B)$  očekivanu stopu prinosa benchmark investicije, najčešće se radi o tzv. nerizičnom ulaganju ili nekoj unapred definisanoj stopi prinosa od strane investitora, a  $\sigma_p$  standardnu devijaciju pomenutog investicionog portfolija. Ovakav indikator pokazuje koliko dobro stopa prinosa kompenzira nivo preuzetog rizika i kao takav se često koristi u rangiranju performansi više različitih investicionih opcija.

## 6. Empirijska analiza

Za potrebe procesa optimizacije ovaj rad obuhvata dnevne podatke o cenama i stopama prinosa izvedenih iz cena najčešće trgovanih akcija na Beogradskoj berzi (NIIS – NIS Novi Sad<sup>2</sup>, AIKB – AIK banka Niš<sup>3</sup>, KMBN – Komercijalna banka Beograd<sup>4</sup>, ENHL – Energoprojekt holding Beograd<sup>5</sup>, SJPT – Soja protein Bečej<sup>6</sup>, IMLK – Imlek Boegrad<sup>7</sup>, FITO – Galenika Fitofarmacija Zemun<sup>8</sup>, MTLC – Metalac Gornji Milanovac<sup>9</sup>, GMON – Goša montaža Velika Plana<sup>10</sup>) za period od pet godina, tačnije od oktobra 2008. do oktobra 2013.

<sup>2</sup> <http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/NIIS>

<sup>3</sup> <http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/AIKB>

<sup>4</sup> <http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/KMBN>

<sup>5</sup> <http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/ENHL>

<sup>6</sup> <http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/SJPT>

<sup>7</sup> <http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/IMLK>

<sup>8</sup> <http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/FITO>

<sup>9</sup> <http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/MTLC>

<sup>10</sup> <http://www.belex.rs/trgovanje/hartija/dnevni/GMON>

godine, odnosno radi se o uzorku od 1250 dnevnih jedinica osmatranja. Ovaj period uglavnom karakteriše prosečan uzlazni trend cena hartija od vrednosti na finansijskom tržištu. U tabeli 1 su prikazani podaci o očekivanim stopama prinosa i standardnim devijacijama za tri investiciona perioda.

**Tabela 1. Očekivane stope prinosa i standardne devijacije pojedinačnih akcija u različitim investicionim periodima**

Akcija	E(R <sub>i</sub> )			σ <sub>i</sub>		
	T = 250	T = 750	T = 1250	T = 250	T = 750	T = 1250
NIIS	0.0231	0.0178	0.0117	0.0100	0.0180	0.0132
AIKB	0.0041	-0.0166	0.0013	0.0190	0.0241	0.0230
KMBN	-0.0009	-0.0151	0.0009	0.0258	0.0234	0.0253
ENHL	0.0366	-0.0056	0.0107	0.0206	0.0229	0.0228
SJPT	0.0230	0.0007	0.0037	0.0272	0.0254	0.0227
IMLK	0.0233	0.0218	0.0224	0.0233	0.0218	0.0236
FITO	0.0290	0.0008	0.0155	0.0237	0.0276	0.0263
MTLC	0.0221	0.0054	0.0093	0.0132	0.0145	0.0176
GMON	0.0130	0.0051	0.0048	0.0333	0.0329	0.0367

Izvor: Sopstveno istraživanje

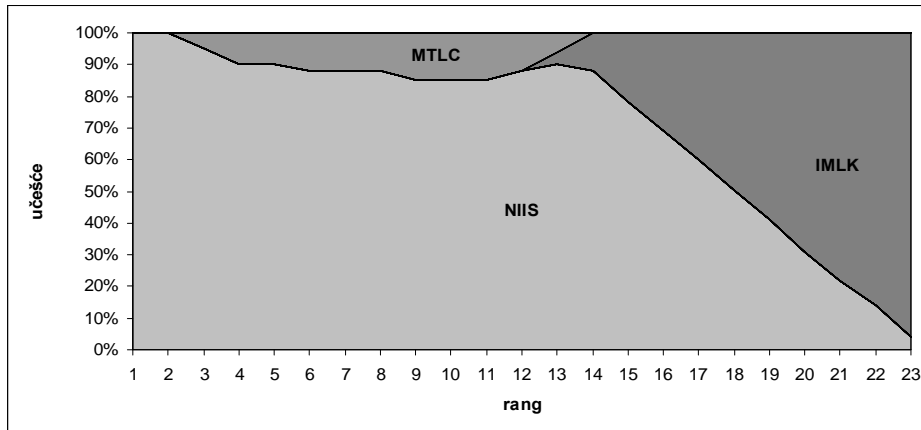
### 6.1. Optimizacija investicionog portfolija

Proces formiranja investicionog portfolija započinje izdvajanjem seta hartija od vrednosti sa odgovarajućim potencijalom investiranja. Za potrebe ovog istraživanja u razmatranje je uzeto devet gore navedenih običnih akcija sa domaćeg finansijskog tržišta. Pri tome, svaka hartija od vrednosti ima podjednake šanse da se nađe u formiranom investicionom portfoliju. Respektujući navedene pretpostavke nastavak rada predstavlja empirijsku studiju simulacije procesa formiranja niza različitih investicionih kombinacija sa stanovišta odnosa prinosa i rizika i isticanje prednosti i nedostataka tradicionalnog i reuzorkovanog procesa optimizacije.

Za definisane funkcije kriterijuma postavlja se M traženi nivo stope prinosa od 0%, 0,1% do 2,2% na mesečnom nivou. Ovako definisani rangovi stopa prinosa, njih ukupno 23, putem algoritma kvadratnog programiranja iz izraza (1) određuju nivo preuzetog rizika. Na taj način, kombinacije tražene stope prinosa i pripadajućeg rizika obrazuju granicu efikasnosti. U potrazi za najboljim odnosom tražene stope prinosa i preuzetog rizika problem adekvatne alokacije raspoloživog kapitala predstavlja veoma značajan segment investicione strategije. Učešća uloženog kapitala u određenu hartiju od vrednosti  $x_i$  postaju promenljive veličine, sa variranjem tražene stope prinosa. Upravo zato, grafik 1 pokazuje proporciju uloženog kapitala na pojedinačne

hartije od vrednosti prema rangovima tražene stope prinosa, a na osnovu problema programiranja iz izraza (1).

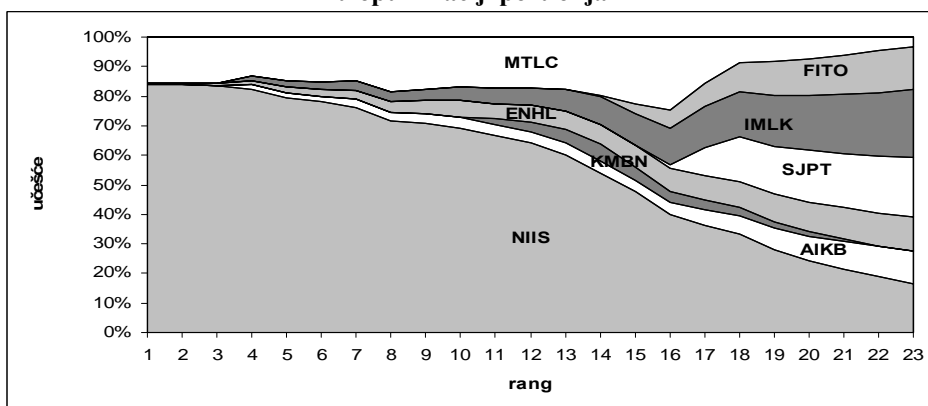
**Grafik 1. Alokacija raspoloživog kapitala kod standardne devijacije kao funkcije kriterijuma**



Izvor: Sopstveno istraživanje

Primena klasičnog Markowitzovog modela optimizacije, koji rezultira učešćima pojedinačnih hartija od vrednosti u investicionom portfoliju, prezentovanih na grafiku 1, naglašava prisutnost niskog stepena diversifikacije među devet potencijalnih ulaganja u hartije od vrednosti. Variranjem tražene stope prinosa, gore navedeni grafici pokazuju najviše tri hartije od vrednosti koje se istovremeno pojavljuju u investicionom portfoliju.

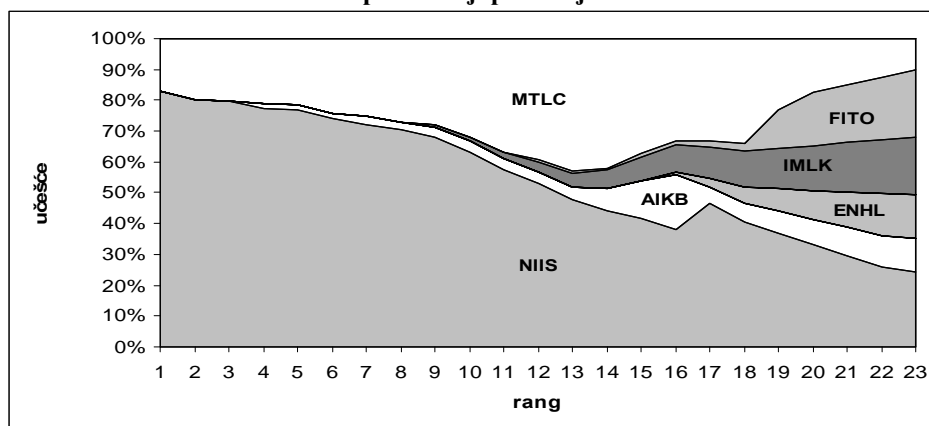
**Grafik 2. Alokacija kapitala primenom pokretnog blok butstrep postupka u optimizaciji portfolija**



Izvor: Sopstveno istraživanje

S druge strane, veći broj realizacija slučajnog procesa vremenske serije stopa prinosa primenom butstrep procedure doprinosi stabilnosti ocene modela optimizacije. Zapravo, ovakav proces optimizacije stvara adekvatnu osnovu za jedan dinamički pristup praćenju kretanja stopa prinosa hartija od vrednosti izbegavši donošenje odluka na osnovu preseka stanja u datom vremenskom trenutku. Osim toga, očekuje se i veći stepen diversifikacije investicionog portfolija, što je vidljivo na osnovu grafika 2 i 3.

**Grafik 3. Alokacija kapitala primenom stacionarnog blok butstrep postupka u optimizaciji portfolija**



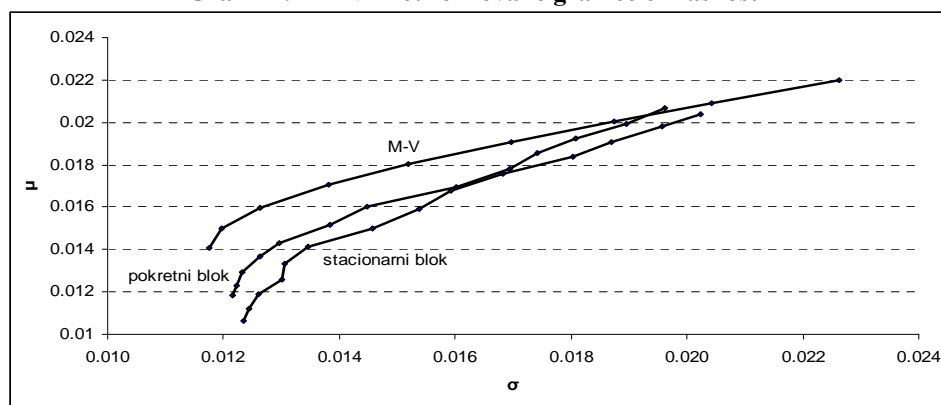
Izvor: Sopstveno istraživanje

Poređenje grafika 1 sa ostala dva grafika 2 i 3 primećuje se značajna procentualna razlika u raspodeli raspoloživog kapitala. Takođe, ponuđeno butstrep rešenje nudi mnogo mirniju tranziciju učešća pojedinačnih hartija od vrednosti u investicionom portfoliju duž reuzorkovanje granice efikasnosti. Ovakva diversifikacija, sa niskim rizikom statističke greške, obezbeđuje visoke performanse ulaganja van formiranog uzorka, za razliku od klasičnog modela optimizacije koji hronično zadržava visoke greške samog formiranja uzorka. Razlike dva pomenuta modela optimizacije pre svega su posledica istorijske varijanse. Postoji velika verovatnoća udaljavanja od istorijske vrednosti među brojnim scenarijima procesa simulacije. Prema tome, neophodno je sprovesti detaljnu analizu graničnih odnosa traženih stopa prinosa i nivoa preuzetog rizika kod butstrep metoda i klasične M – V optimizacije. Ako se uporede prosečne realizacije procesa optimizacije primenom butstrep metoda, primećuje se da svaka od butstrep metoda pojedinačno ima veći stepen raspodele od klasične optimizacije. Međutim, primetne su i odgovarajuće razlike između samih butstrep metoda posledično razlikama u polaznim butstrep algoritmima. Premda se za sve njih zajedno može izvući jedan jedinstveni obrazac kretanja procentualnih učešća uloženog kapitala u skladu sa traženom stopom prinosa hartija od vrednosti.

## 6.2. Granice efikasnosti

Granica efikasnosti predstavlja polaznu tačku ispitivanja kvaliteta formiranog investicionog portfolija. Sama granica pokazuje skup najboljih ulaganja sa stanovišta odnosa traženog prinosa i za to preuzetog ukupnog rizika. Za početak izračunava se klasična M – V granica efikasnosti na osnovu originalnog seta ulaznih podataka finansijskih vremenskih serija stopa prinosa i naglašava da su samo učešća izračunata putem Markowitzevog modela optimalna u vezi sa skupom originalnih podataka vremenske serije. Analiza se nastavlja sa procedurom reuzorkovanja primenjujući 2 odvojena butstrep metoda u funkciji optimizacije. Nakon toga vrši se grafičko prezentovanje klasične granice efikasnosti i seta reuzorkovanih granica efikasnosti kao što je prikazano na grafiku 4.

Grafik 4. M – V i reuzorkovane granice efikasnosti



Izvor: Sopstveno istraživanje

Na osnovu grafika 4 vidi se da se većina mogućih kombinacija prinosa i rizika za različite varijante investicionog portfolija nalaze ispod polazne granice efikasnosti, što uostalom još jednom ističe tvrdnju da se samo optimum iz polaznog modela optimizacije može smatrati i pravim optimumom na osnovu originalnog seta podataka. Ipak, u prilog sve frekventnijoj upotrebi postupka reuzorkovanja u okviru primene modela optimizacije stoji i dalje veći broj hartija od vrednosti kod formiranja efikasnog investicionog portfolija i ne tako izražene promene u alokaciji sa promenama tražene stope prinosa, što se može okarakterisati kao veoma poželjno prilikom donošenja investicione odluke.

## 6.3. Testiranje performansi investicionog portfolija

Prethodno urađena komparacija klasičnog modela optimizacije sa modelima koji koriste proces reuzorkovanja puno govori o njihovim svojstvima i

eventualnim situacijama za njihovu efikasnu primenu. Međutim, značajne razlike, dobijene u predašnjim istraživanjima, otvaraju brojna pitanja i povećavaju ulog za testiranjem dobijenih rezultata investicionih portfolija. Diversifikacija podstiče bolji odnos ostvarenog prinosa po jedinici preuzetog rizika, dok se za nedovoljno diversifikovani portfolio kaže da ima lošije investicione performanse van formiranog uzorka. Ovako formirane hipoteze nisu potpuno proverene i uglavnom zavise od slučaja do slučaja, što dodatno otvara pitanje adekvatnog testiranja. Kod stihijskih, nestandardizovanih testiranja često izostaju željeni rezultati, zbog čega se javlja potreba neprekidnog kontrolisanja sopstvene investicije unutar i van uzorka kako bi se spremno dočekale eventualne potrebe za realokacijom raspoloživog kapitala.

Za početak sprovedeno je testiranje unutar uzorka koristeći se merom preferencija investiranja i Sharpeovim indeksom. Tom prilikom, testirajući definisane koeficijente averzije od rizika na robustnost izabrana je vrednost  $\lambda = 1$ .

**Tabela 2. Performanse investicionog portfolija unutar uzorka**

Tražena stopa prinosa	Mera performansi	M-V model	Pokretni blok	Stacionarni blok
0.5%	$\phi$	0.00545	0.00364	0.00291
	S	0.96547	0.85441	0.78956
1%	$\phi$	0.00543	0.00554	0.00506
	S	0.99621	0.98854	0.91205
1.5%	$\phi$	0.00922	0.00901	0.00825
	S	1.22104	1.11458	1.06325
2%	$\phi$	0.01054	0.01047	0.00996
	S	1.05698	1.06657	1.03215

Izvor: Sopstveno istraživanje

Navedeni rezultati dve mere performansi investiranja u tabeli 2 pokazuju da butstrep metodi optimizacije prate klasični metod optimizacije, što je posebno izraženo kod viših traženih stopa prinosa.

Da bi se ispitali efekti diversifikacije investicionog portfolija na osnovu butstrep metoda optimizacije, neophodno je analizu izvesti i izvan okvira formiranog uzorka. Za potrebe ovog istraživanja korišćen je period od oktobra 2013. do marta 2014. godine, odnosno ukupno 104 dnevne jedinice osmatranja stopa prinosa pojedinačnih hartija od vrednosti. Na ovaj način, sami rezultati performansi zavise od ocenjenih učešća pojedinih hartija od vrednosti unutar uzorka za tražene nivoe stopa prinosa, ali i od očekivanih stopa prinosa, varijansi i kovarijansi izvan uzorka, odnosno u unapred definisanom periodu.

**Tabela 3. Performanse investicionog portfolija izvan uzorka**

Tražena stopa prinosa	Mera performansi	M-V model	Pokretni blok	Stacionarni blok
0.5%	$\phi$	0.00122	0.00143	0.00131
	S	0.22254	0.24044	0.23699
1%	$\phi$	0.00122	0.00131	0.00142
	S	0.22607	0.25023	0.23229
1.5%	$\phi$	0.00182	0.00165	0.00212
	S	0.26395	0.27771	0.34006
2%	$\phi$	0.00178	0.00291	0.00194
	S	0.21458	0.41008	0.32907

Izvor: Sopstveno istraživanje

Povećanje stepena diversifikacije i njegov uticaj na smanjenje varijanse formiranog investicionog portfolija u određenim slučajevima donose poboljšanje performansi ulaganja van uzorka, kao što se može videti u tabeli 3. Ipak, treba naglasiti da je ovo samo jedan poduzorak formiran izvan početnog perioda ocenjivanja, tako da se dobijeni rezultati moraju posmatrati s određenom rezervom.

#### **6.4. Testiranje osetljivosti portfolija na dužinu investicionog perioda**

S obzirom na pretpostavku postojanja stacionarnosti vremenske serije stopa prinosa, povećanje vremenskog intervala u početnom uzorku smanjuju greške u oceni, odnosno one konvergiraju ka nuli kako period osmatranja teži beskonačnosti. Kako ističu Choi i Mukherji (2010), pristalice vremenskog diversifikovanja investicionog portfolija sugerišu da se sa povećanjem investicionog horizonta smanjuje volatilitet stopa prinosa hartija od vrednosti zbog njene težnje ka prosečnoj vrednosti. Cogneau i Zakamouline (2010) prihvataju činjenicu da je vremenski period jedan od ključnih faktora pri određivanju optimalne alokacije investicionog portfolija. Hickman et al. (2001) uočavaju da investitori na duži rok ostvaruju mnogo manje granične stope prinosa ukoliko ne ulažu u rizične hartije od vrednosti. Sigurnija ulaganja sa nižim stepenom rizika nosi manje performanse na duži rok od optimalnog investicionog portfolija koji čini nekoliko rizičnih hartija od vrednosti.

Sa otežanim prikupljanjem adekvatne istorijske serije stopa prinosa, pa tako i ocenom rizika i stopa prinosa investicionog portfolija, posebno na visoko volatilnim finansijskim tržištima zemalja u razvoju, Hansson, Persson (2000), odnosno Cogneau i Zakamouline (2010), uvode serije reuzorkovanih stopa prinosa iz raspoloživih podataka. Ovakva metodologija formiranja serija stopa prinosa se koristi u aproksimaciji njihove distribucije na duži rok pri nedostupnosti dovoljno velike istorijske serije traženih podataka. Zadržavajući

se u okvirima inicijalnog uzorka od 5 godina i uvažavajući trendove pre i za vreme svetske ekonomske krize, koji dovode do pogrešnih pravaca realizacije modela optimizacije, ovaj rad će ostati u postavljenim vremenskim okvirima, a kao naknadu smanjenoj prediktivnoj moći formiranog uzorka predložiti set do sad pomenutih butstrep postupaka. U tom smislu, predlaže se uvođenje kraćeg, srednjeg i dugog perioda investiranja, odnosno uzorka od jedne, tri i pet godina dnevnih osmatranja stopa prinosa, kao što je navedeno u tabeli 1.

Gore navedena tabela 1 očekivanih stopa prinosa i standardnih devijacija ne pokazuje isključivo povećanje ova dva statistička indikatora sa povećanjem investicionog horizonta. Međutim, izraženija promena očekivanih stopa prinosa od standardnih devijacija smanjuju učešća akcija u portfoliju sa nižim stepenom standardne devijacije i okreću se akcijama sa višim očekivanim stopama prinosa pri povećanju dužine trajanja ulaganja. Prema tome, promena veka investiranja utiče i na promene u alokaciji raspoloživog kapitala u portfoliju. Drugim rečima, eventualna promena odluke o periodu vezivanja kapitala ističe potrebu rebalansa učešća pojedinačnih hartija od vrednosti u portfoliju. Stoga, svaki vremenski interval i model optimizacije imaju svoja učešća pojedinačnih akcija, pa tako i svoje mere performansi koje su predstavljene u narednoj tabeli.

**Tabela 4. Performanse investiranja portfolija u različitim vremenskim intervalima**

Metod optimizacije	Sharpe indeks			$\phi$		
	T = 250	T = 750	T = 1250	T = 250	T = 750	T = 1250
M – V model	0.2398	0.1965	0.2321	0.0239	0.0182	0.0222
Pokretni blok	0.2875	0.2844	0.2898	0.0212	0.0227	0.0224
Stacionarni blok	0.2571	0.2590	0.2476	0.0217	0.0232	0.0209

Izvor: Sopstveno istraživanje

Dobijeni rezultati mera performansi putem klasičnog modela optimizacije, otvaraju pitanje efikasne primene istog u procesu donošenja investicionih odluka. Zapravo, navedene razlike u rezultatima ovog modela upućuju na izrazite greške u ocenjivanju i potrebi preispitivanja dobijenog optimuma sa svakom malo značajnijom promenom u stopama prinosa. S druge strane, butstrep postupci, sa svojim konačnim brojem ponavljanja mogućih scenarija na osnovu istorijske serije podataka, veću pažnju posvećuju rizičnijim akcijama koje, po pravilu, nose veće očekivane stope prinosa, a pri tome putem efikasnije diversifikacije zadržavaju stepen rizičnosti na vrlo niskom nivou. Tako performanse uglavnom rastu sa povećanjem broja uključenih jedinica osmatranja u model optimizacije. Prisutan je i visok stepen stabilnosti dobijenih rezultata bez naglih promena, što uostalom govori o nepristrasnoj i efikasnoj oceni modela optimizacije kod većeg broja butstrep metoda. Drugim rečima, butstrep metode nude performanse ulaganja u investicioni portfolio koje su



znatno robustnije od rezultata klasičnog modela optimizacije, odnosno smanjuju osetljivost u performansama na promene dužine intervala investiranja.

## 7. Zaključak

Formiranje portfolija putem postupka reuzorkovanja pruža jedan intuitivni način suočavanja sa greškama iz uzorka prilikom optimizacije investicionog portfolija. Proces ponavljanja uzoraka karakterističan za metod reuzorkovane efikasnosti pomaže merenju efekata neizvesnosti u investicionom okruženju. Poređenjem M-V optimizacije i optimizacije zasnovane na butstrep procesu stiče se snažan utisak da drugi navedeni model dovodi do stabilnijih ocena investicionih portfolija sa izraženijim stepenom diversifikacije.

Međutim, kada su u pitanju mere performansi ovaj rad ne uspeva da dokaže da postupak optimizacije zasnovan na butstrep metodu nadmašuje klasični metod optimizacije unutar uzorka. Ipak, posmatrajući performanse investiranja u periodu van uzorka, kao i kod testiranja osetljivosti investicionih performansi na variranje perioda ulaganja, mogu se dati odgovarajuće konstatacije u prilog butstrep metodologiji. Obuhvatanjem većeg broja slučajnih događaja kroz butstrep proces dobija se ocena koja je manje osetljiva na promene ulaznih faktora pod uticajem neizvesnosti i variranja dužine investicionog perioda.

## Literatura

- Becker, F., Gürtler, M., Hibbeln, M. (2009). Markowitz versus Michaud: Portfolio Optimization Strategies Reconsidered, preuzeto 22.10.2013. sa sajta: <http://econstor.eu/bitstream/10419/55254/1/684929953.pdf>
- Black, F., Litterman, R. (1992) "Global Portfolio Optimization", *Financial Analysts Journal*, 48(5): 28-43.
- Choi, B.P., Mukherji, S. (2010) "Optimal Portfolios for Different Holding Periods", *Journal of Business & Economics Research*, 8(10): 1-6.
- Cogneau, P., Zakomouline, V. (2010) Bootstrap Methods for Finance: Review and Analysis, preuzeto 27. decembra 2011. sa sajta: [http://www.seminar.hec.ulg.ac.be/docs/Sem21.10.10\\_Cogneau.pdf](http://www.seminar.hec.ulg.ac.be/docs/Sem21.10.10_Cogneau.pdf)
- Delcourt, F., Petitjean, M. (2011) "To What Extent is Resampling Useful in Portfolio Management", *Applied Economic Letters*, 18(3): 239-244.
- Fama, E., French, K. (1988) "Permanent and Temporary Components of Stock Prices", *Journal of Political Economy*, 96(2): 246-273.
- Fletcher, J., Hillier, J. (2001) "An Examination of Resampled Portfolio Efficiency", *Financial Analysts Journal*, 57(5): 66-74.
- Hansson, B., Persson, M. (2000) "Time Diversification and Estimation Risk", *Financial Analysts Journal*, 56(5): 55-62.
- Harvey, C., Liechty, J., Liechty, M. (2008) "Bayes vs. Resampling: A Rematch", *Journal of Investment Management*, 6(1): 29-45.

- Hickman, K., Hunter, H., Byrd, J., Beck, J., Terpening, W. (2001) "Life Cycle Investing, Holding Periods and Risk", *The Journal of Portfolio Management*, 27(2): 101-111.
- Kirzner, E. (2000) Fact and Fantasy in Index Investing, Rotman School of Management, University of Toronto.
- Künsch, H. (1989) "The Jackknife and the Bootstrap for General Stationary Observations", *Annals of Statistics*, 17(3): 1217-1241.
- Liu, R., Singh, K. (1992) Moving Blocks Jackknife and Bootstrap Capture Weak Dependence, New York: John Wiley & Sons.
- Markowitz, H. (1952) "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, 7(1): 77-91.
- Markowitz, H., Usman, N. (2003) "Resampled Frontier Versus Diffuse Bayes: An Experiment", *Journal of Investment Management*, 1(4): 9-25.
- Michaud, R. (1998) Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation, Boston: Harvard Business School Press.
- Michaud, R., Michaud, R. (2008) Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation, 2<sup>nd</sup> Edition, Oxford University Press.
- Politis, D., Romano, J. (1994) "The Stationary Bootstrap", *Journal of the American Statistical Association*, 89(428): 1303-1313.
- Scherer, B. (2002) "Portfolio Resampling: Review and Critique", *Financial Analysts Journal*, 58(6): 98-109.
- Srivatsa, R., Smith, A., Lekander, J. (2010) "Portfolio Optimisation and Bootstrapping", *Journal of Property Investment and Finance*, 28(1): 24-33.

## **TESTING THE PERFORMANCE OF THE INVESTMENT PORTFOLIO USING BLOCK BOOTSTRAP METHOD**

**Abstract:** The aim of this paper is to create a stable model of investment portfolio optimization through a high degree of diversification and reduction of sudden changes in the allocation with monitoring of the dynamics of the impact factor. In this sense, there is bootstrap application procedure, which, without an excessive number of constraints involved in the optimization process provides solutions based on uncertain information. Thus defined, the optimization method has been patented by Michaud (1999) entitled re-sampled efficiency. Accordingly, this paper offers a comparison of the performance block bootstrap optimization models and traditional Markowitz's model inside and outside of the sample by applying the most frequently traded stocks on the BSE. The results show a better performance out of the sample and the presence of a larger number of shares forming the portfolio through bootstrap methodology. However, only through the traditional optimization process could be attained optimum according to the required limits. Such effects can be observed by comparing the limits of efficiency obtained through these optimization models. However, optimization-based methods bootstrap finds its place in reducing errors of assessment resulting from the limited sample size.

**Keywords:** Investment portfolio, optimization, re-sampled efficiency, bootstrap, efficiency limit